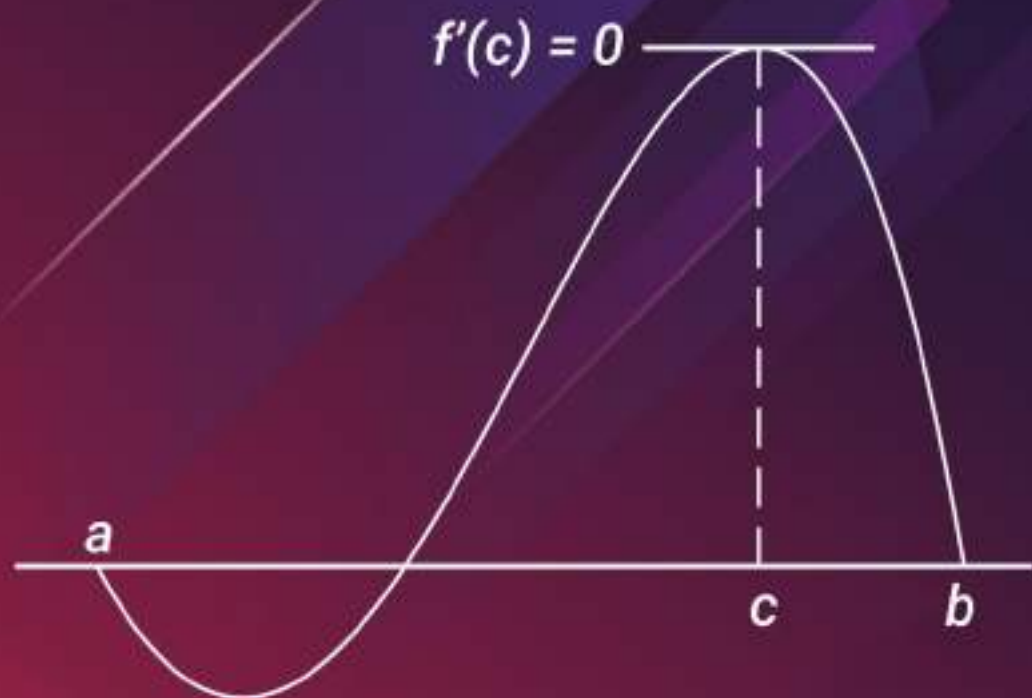




Pengantar **ANALISIS REAL**



Ryan Nizar Zulfikar, S.Pd., M.Pd
Nur Hasanah Syarief, S.Pd., M.Pd

PENGANTAR ANALISIS REAL

PENULIS

**Ryan Nizar Zulfikar, S.Pd., M.Pd
Nur Hasanah Syarieff, S.Pd., M.Pd**



UU No. 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta

Fungsi dan Sifat Hak Cipta Pasal 4

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

Pembatasan Pelindungan Pasal 26

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

- i. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
- ii. penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
- iii. penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan fonogram yang telah dilakukan pengumuman sebagai bahan ajar; dan
- iv. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

Sanksi Pelanggaran Pasal 113

1. Setiap orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000,00 (seratus juta rupiah).
2. Setiap orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

PENGANTAR ANALISIS REAL

**Ryan Nizar Zulfikar, S.Pd., M.Pd
Nur Hasanah Syarief, S.Pd., M.Pd**

**TATA LETAK:
Wahyuni Putri Adeningsi**

**DESAIN SAMPUL:
Rachmadiansyah**

**SUMBER:
www.tdjpublisher.com**

**ISBN:
978-623-8706-61-7**

**CETAKAN PERTAMA:
Oktober 2024**

**UKURAN:
ii + 168 Hal; 15,5 cm x 23 cm**

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang.

Dilarang menggandakan atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini
dalam bentuk apa pun tanpa izin tertulis dari penerbit dan penulis.

**ANGGOTA IKAPI: 006/NTT/2022
TANGGUH DENARA JAYA PUBLISHER**
Jl. Timor Raya No. 130 B Oesapa Barat, Kelapa Lima
Kota Kupang, Nusa Tenggara Timur
E-mail: tdj.denarapublisher@gmail.com
Telepon: 0380-8436618/081220051382

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga buku “Pengantar Analisis Real” ini dapat diselesaikan dengan baik. Buku ini disusun sebagai salah satu referensi utama dalam perkuliahan Analisis Real, yang merupakan mata kuliah wajib bagi mahasiswa program studi Matematika.

Materi dalam buku ini mencakup dasar-dasar analisis seperti himpunan, fungsi, induksi matematika, serta sifat-sifat bilangan real. Kami berharap buku ini dapat membantu mahasiswa dalam memahami konsep-konsep dasar yang sangat penting dalam analisis matematika.

Kami menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kami sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari para pembaca demi perbaikan dan penyempurnaan buku ini di masa mendatang.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan buku ini, terutama kepada rekan-rekan dosen dan mahasiswa yang telah memberikan masukan berharga.

Semoga buku ini bermanfaat bagi para mahasiswa dan semua pihak yang tertarik dalam bidang analisis real.

Kupang, 27 September 2024

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	ii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Aljabar Himpunan	1
1.2 Fungsi	6
1.3 Induksi Matematika	9
BAB II SISTEM BILANGAN REAL	15
2.1 Sifat-Sifat Aljabar Sistem Bilangan Real	15
2.2 Sifat-Sifat Urutan dari $\Re$	21
2.3 Nilai Mutlak	31
2.4 Sifat Kelengkapan dari $\Re$	37
2.5 Aplikasi dari Sifat Supremum (Sifat Archimides)	42
BAB III BARISAN BILANGAN REAL	47
3.1 Barisan dan Limit	47
3.2 Teorema Limit Barisan	54
3.3 Barisan Monoton dan Subbarisan	64
3.4 Kriteria Cauchy	74
3.5 Barisan Divergen Sejati	82
BAB IV LIMIT FUNGSI	86
4.1 Limit Fungsi	86
4.2 Teorema Limit	95
BAB V FUNGSI KONTINU	104
5.1 Fungsi Kontinu	104
5.2 Kombinasi dari Fungsi Kontinu	109
5.3 Fungsi Kontinu pada Interval	115
5.4 Kontinu Seragam	120
BAB VI DIFERENSIASI	128
6.1 Derivatif	128
6.2 Teorema Nilai Rata-rata	139
6.3 Aturan L'Hospital	149
6.4 Teorema Taylor	161
DAFTAR PUSTAKA	168

BAB I

PENDAHULUAN

Himpunan merupakan dasar dari matematika dan semua objek matematika serta konstruksinya akan kembali pada teori himpunan. Di dalam bab ini, kita akan membahas pengertian himpunan, notasi dan sifat-sifatnya, tetapi karena tujuan dari buku ini akan menyajikan dasar-dasar dari analisis real, maka topik tentang himpunan tidak akan dibahas secara mendetail di buku ini. Bagi pembaca yang sudah familiar dengan teori himpunan, bab ini dapat ditinggalkan.

1.1 Aljabar Himpunan

Jika A melambangkan himpunan dan x elemen di dalam A , maka sering dituliskan dengan $x \in A$ sebagai singkatan dari pernyataan **x elemen himpunan A** atau **x anggota himpunan A** atau himpunan A memuat elemen x . Jika x bukan elemen di dalam A , maka akan dinotasikan dengan $x \notin A$. Dari sebuah elemen x dan himpunan A , hanya tepat satu kemungkinan dari dua pernyataan berikut berlaku:

$$x \in A \text{ atau } x \notin A.$$

Jika A dan B merupakan dua himpunan dan x sebuah elemen, maka terdapat 4 kemungkinan yaitu:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| (1) $x \in A$ dan $x \in B$ | (2) $x \in A$ dan $x \notin B$. |
| (3) $x \notin A$ dan $x \in B$ | (4) $x \notin A$ dan $x \notin B$ |

Jika setiap elemen dari A juga termuat di dalam B atau A merupakan himpunan bagian dari B , akan dituliskan dengan

$$A \subseteq B \quad \text{atau} \quad B \supseteq A.$$

Jika $A \subseteq B$ dan terdapat elemen di dalam B yang tidak di dalam A , dikatakan A **himpunan bagian (subset) sejati** dari B , dan dinotasikan dengan $A \subset B$.

Definisi 1.1.1 Dua himpunan dikatakan **sama** jika mereka memuat elemen-elemen yang sama. Jika himpunan A dan B sama, maka dinotasikan dengan $A = B$.

Dengan kata lain, dua himpunan A dan B dikatakan sama jika syarat (2) dan (3) di atas tidak berlaku. Secara ekuivalen, kita harus menunjukkan bahwa $A \subseteq B$ dan $A \supseteq B$.

Penulisan himpunan selain disajikan dengan cara mendaftar dapat juga disajikan dengan menyebutkan sifat-sifatnya, sehingga suatu himpunan sering dituliskan sebagai

$$\{x : P(x)\}$$

sebagai lambang untuk himpunan semua elemen x yang mempunyai sifat P , sering juga dibaca dengan "himpunan semua x sedemikian hingga $P(x)$ ". Untuk memberi kejelasan terhadap semesta pembicaraan, notasi di atas sering juga ditulis dengan

$$\{x \in S : P(x)\}$$

untuk menuliskan himpunan bagian dari S yang mempunyai sifat P .

Contoh 1

- (a) Jika $N := \{1, 2, 3, \dots\}$ melambangkan himpunan bilangan-bilangan asli maka himpunan

$$A = \{x \in N : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

memuat bilangan-bilangan asli yang memenuhi persamaan $x^2 - 3x + 2 = 0$. Padahal penyelesaian persamaan kuadrat $x^2 - 3x + 2 = 0$ adalah $x = 1$ atau $x = 2$. Dengan demikian, himpunan di atas sering dituliskan dengan cara mendaftar sebagai $A = \{1, 2\}$.

- (b) Himpunan semua bilangan asli genap dapat dinotasikan dengan $\{2x : x \in N\}$ atau $\{y \in N : y = 2x, x \in N\}$.

- (c) Himpunan bilangan bulat dinotasikan dengan

$$Z := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Himpunan bilangan rasional dinotasikan dengan

$$Q := \{m/n : m, n \in Z \text{ dan } n \neq 0\}.$$

Catatan: Kita akan sering menggunakan simbol $:=$ dengan pengertian bahwa simbol di sebelah kiri didefinisikan dengan ekspresi pada sisi kanan.

Sekarang kita akan mengenalkan beberapa operasi pada himpunan yaitu suatu cara untuk mengkonstruksi himpunan baru berdasarkan pada himpunan-himpunan yang telah diketahui.

Definisi 1.1.2 Jika A dan B adalah himpunan-himpunan, maka **irisan** (interseksi) mereka adalah himpunan semua elemen yang termuat pada himpunan A dan B . Kita akan menotasikan irisan A dan B dengan $A \cap B$. (lihat Gambar 1.1.1).